



Modelo para el Cálculo de Peajes en las Carreteras Nacionales

Enero de 2010

Preparado para el Ministerio de Transporte

Elementos teóricos en la tarificación de las vías

- Las carreteras son un bien público puro (en ausencia de congestión)
 - No rivalidad en el consumo.
 - No exclusión.
- Los bienes públicos presentan dificultades en su planeación y financiación.
 - Dificultad para auscultar permanentemente la demanda.
 - Dificultad para escoger el dimensionamiento.
 - La financiación recae sobre recursos públicos de libre disponibilidad (volátiles e insuficientes).
- El uso de carreteras presenta externalidades.
 - Congestión.
 - Deterioro de la vía.
 - Contaminación.
- Una política óptima de precios debe considerar las externalidades.
 - Con externalidades negativas los precios de mercado generan un consumo superior al óptimo social.
 - Con externalidades positivas los precios de mercado generan un consumo inferior al óptimo social.

Objetivos del modelo de peajes

- Las carreteras con peaje se asemejan más a un bien privado.
 - Posibilidad de exclusión (caseta de peaje).
 - Rivalidad en horas de alto tráfico (congestión).
- Pero, mantienen las externalidades.
- El objetivo del modelo es encontrar las tarifas de peaje que capturan los gastos que ocasiona el paso de cada vehículo (costo de capital y mantenimiento) y la congestión que genera.
- Estos efectos se calculan suponiendo que la infraestructura está dimensionada en el óptimo económico en términos de ancho de la vía y grosor del pavimento.
- De esta forma los errores en las especificaciones no se trasladan a los usuarios vía tarifa.
- El modelo arroja los parámetros óptimos de diseño dado el volumen y composición de tráfico en cada tramo.

Estructura del modelo

- El modelo contiene la siguiente información de 1.053 tramos que comprenden tanto la red concesionada como la no concesionada del nivel nacional:
 - Tráfico.
 - Volumen.
 - Composición.
 - Tipo de terreno.
 - Especificaciones (ancho de calzada, ancho de berma, pendiente (%), radio de curvatura (grados/Km) y deflexión(m/Km)).
- A partir de esta información, previamente se estiman y se incluyen al modelo:
 - La capacidad de la vía (manual Invías).
 - Los vehículos equivalentes.
 - Los ejes equivalentes.

Enfoque del modelo

- El modelo contiene las siguientes funciones:
 - Costo de capital (K).
 - Costo de mantenimiento (M).
 - Costo de congestión (c).
- De igual forma, contiene las derivadas de estas funciones con relación a ejes equivalentes (Q), vehículos equivalentes (V), grosor del pavimento (D) y el ancho de la vía (W).
- Resuelve un conjunto de ecuaciones que determinan simultáneamente:
 - D óptimo (D^*).
 - W óptimo (W^*).
 - El efecto de un eje equivalente sobre los costos (K y M).
 - El efecto de un vehículo equivalente sobre la congestión (c).
- Con base en estos resultados estima la tarifa óptima de peaje expresada en \$/100Km para cada tipo de vehículo en cada tramo.
- La tarifa es el resultado de multiplicar el número de ejes de cada tipo de vehículo por el impacto del eje en los costos más el número de vehículos equivalentes por el impacto en la congestión.
- El modelo puede estimar las tarifas tomando las dimensiones observadas de la vía y las tarifas resultantes de escenarios formulados por el usuario del modelo en términos de la periodicidad del mantenimiento.

Ecuaciones del modelo

- Función de capital:

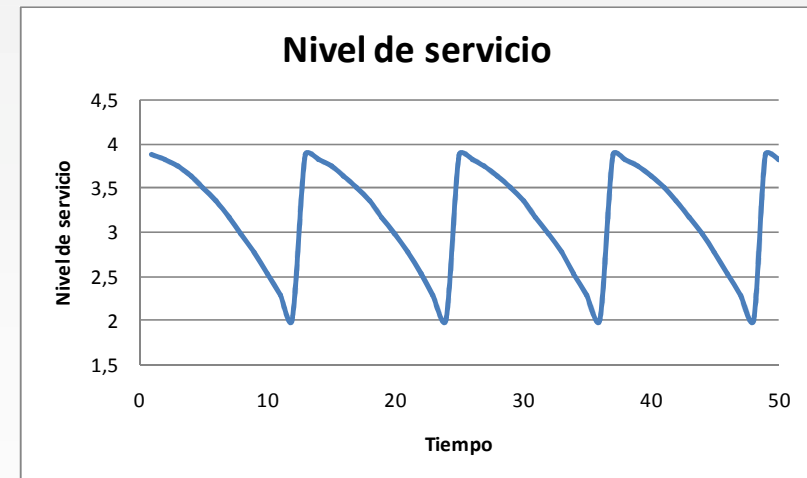
$$K = k_0 + k_1 W + k_2 WD$$

- Ecuaciones de mantenimiento:

$$N = A_0 (D + 1)^{A_1} (L_1 + L_2)^{-A_2} L_3^{A_3}$$

$$\pi(t) = \pi_0 - (\pi_0 - \pi_f) \left(\frac{\lambda Q t}{N} \right) e^{mt}$$

$$T = \frac{N}{\lambda Q} e^{-mt}$$



Condiciones de la tarifa

- Ecuaciones de optimalidad:

$$\frac{\partial K}{\partial D} = -\frac{\partial M}{\partial D}$$

$$r\left(\frac{\partial M}{\partial W} + \frac{\partial K}{\partial W}\right) = -\frac{\partial c}{\partial W}$$

$$T = \frac{N}{\lambda Q} e^{-mT}$$

Condiciones de la tarifa

- Condiciones de optimalidad: ¿qué valores de W , D y T me permiten conseguir simultáneamente...

$$\frac{\partial K}{\partial D} + \frac{\partial M}{\partial D} = 0$$

$$r \left(\frac{\partial M}{\partial W} + \frac{\partial K}{\partial W} \right) + \frac{\partial c}{\partial W} = 0$$

$$T - \frac{N}{\lambda Q} e^{-mT} = 0$$

Ecuaciones del modelo

- Función de congestión:

$$c(V, W) = c_1 \left(\frac{V/h}{c_w W} \right)^k$$

- Condiciones de optimización (solución no lineal de un sistema de ecuaciones):

$$\frac{\partial K}{\partial D} = -\frac{\partial M}{\partial D}$$

$$r \left(\frac{\partial M}{\partial W} + \frac{\partial K}{\partial W} \right) = -\frac{\partial c}{\partial W}$$

$$T^* = \frac{N}{\lambda Q} e^{-mT^*}$$

Desarrollo matemático

- Costo de construcción

$$K = k_0 + k_1W + k_2WD$$

$$\frac{\partial K}{\partial W} = k_1 + k_2D$$

$$\frac{\partial K}{\partial D} = k_2W$$

Desarrollo matemático

- Costo de mantenimiento

$$M(Q, W, D) = \frac{C(W)}{(e^{rT} - 1)}$$

- $C(W)$ es el costo periódico de mantenimiento de una vía.
- Así, $M()$ es el valor presente de las actividades de mantenimiento que se llevan a cabo cada T años.

Desarrollo matemático

- Costo de mantenimiento

$$M(Q, W, D) = \frac{C(W)}{(e^{rT} - 1)}$$

$$\frac{\partial M}{\partial W} = \frac{\partial C}{\partial W} \frac{1}{(e^{rT} - 1)} = \frac{C(W)}{(e^{rT} - 1)}$$

Desarrollo matemático

- Costo de mantenimiento

$$M(Q, W, D) = \frac{C(W)}{(e^{rT} - 1)}$$

$$\frac{\partial M}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} C(W) (e^{rT} - 1)^{-1} = C(W) \frac{\partial}{\partial D} (e^{rT} - 1)^{-1}$$

$$\frac{\partial M}{\partial D} = -C(W) (e^{rT} - 1)^{-2} \frac{\partial}{\partial D} e^{rT}$$

$$\frac{\partial M}{\partial D} = -C(W) (e^{rT} - 1)^{-2} r e^{rT} \frac{\partial T}{\partial D} \quad (1)$$

Desarrollo matemático

- Duración de la vía

$$\pi(t) = \pi_0 - (\pi_0 - \pi_f) \left(\frac{\lambda Q t}{N} \right) e^{mt}$$

$$\pi_f = \pi_0 - (\pi_0 - \pi_f) \left(\frac{\lambda Q t}{N} \right) e^{mt}$$

$$-(\pi_0 - \pi_f) = -(\pi_0 - \pi_f) \left(\frac{\lambda Q t}{N} \right) e^{mt}$$

$$1 = \left(\frac{\lambda Q t}{N} \right) e^{mt}$$

$$T = \frac{N}{\lambda Q} e^{-mt}$$

Desarrollo matemático

- Duración de la vía

$$T = \frac{N}{\lambda Q} e^{-mt}$$

$$\frac{\partial T}{\partial D} = \frac{\partial N}{\partial D} \frac{1}{\lambda Q} e^{-mt} - \frac{Nm}{\lambda Q} e^{-mT} \frac{\partial T}{\partial D}$$

$$\frac{\partial T}{\partial D} + \frac{Nm}{\lambda Q} e^{-mT} \frac{\partial T}{\partial D} = \frac{\partial N}{\partial D} \frac{1}{\lambda Q} e^{-mt}$$

$$\frac{\partial T}{\partial D} \left(1 + \frac{Nm}{\lambda Q} e^{-mT} \right) = \frac{\partial N}{\partial D} \frac{1}{\lambda Q} e^{-mt}$$

Desarrollo matemático

- Duración de la vía

$$\frac{\partial T}{\partial D} \left(1 + \frac{Nm}{\lambda Q} e^{-mT} \right) = \frac{\partial N}{\partial D} \frac{1}{\lambda Q} e^{-mt}$$

$$\frac{\partial T}{\partial D} = \frac{\partial N}{\partial D} \frac{\frac{1}{\lambda Q} e^{-mt}}{\left(1 + \frac{Nm}{\lambda Q} e^{-mT} \right)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial D} = \frac{\partial N}{\partial D} \frac{e^{-mt}}{\left(\lambda Q + N m e^{-mT} \right)} \quad (2)$$

Desarrollo matemático

- Duración de la vía

$$N = A_0 (D + 1)^{A_1} (L_1 + L_2)^{-A_2} L_3^{A_3}$$

$$\frac{\partial N}{\partial D} = A_0 A_1 (D + 1)^{A_1 - 1} (L_1 + L_2)^{-A_2} L_3^{A_3} \quad (3)$$

- Reemplazamos (3) en (2)

$$\frac{\partial T}{\partial D} = \left[A_0 A_1 (D + 1)^{A_1 - 1} (L_1 + L_2)^{-A_2} L_3^{A_3} \right] \frac{e^{-mt}}{(\lambda Q + N m e^{-mT})} \quad (4)$$

Desarrollo matemático

- Costo de mantenimiento

$$\frac{\partial M}{\partial D} = -C(W)(e^{rT} - 1)^{-2} r e^{rT} \frac{\partial T}{\partial D} \quad (1)$$

- Reemplazamos (4) en (1)

$$\frac{\partial M}{\partial D} = -C(W)(e^{rT} - 1)^{-2} r e^{rT} \left[A_0 A_1 (D + 1)^{A_1 - 1} (L_1 + L_2)^{-A_2} L_3^{A_3} \right] \frac{e^{-mT}}{(\lambda Q + N m e^{-mT})}$$

$$\frac{\partial M}{\partial D} = -r C(W) \left[A_0 A_1 (D + 1)^{A_1 - 1} (L_1 + L_2)^{-A_2} L_3^{A_3} \right] \frac{e^{rT}}{(e^{rT} - 1)^2 e^{mT} (\lambda Q + N m e^{-mT})}$$

Desarrollo matemático

- Costo de congestión

$$c(V, W) = c_1 \left(\frac{V/h}{c_w W} \right)^k$$

- (V/h) : volumen de vehículos en hora pico.
- c_w : capacidad de un carril estándar.
- c_1 : valoración del tiempo

Desarrollo matemático

- Costo de congestión

$$c(V, W) = c_1 \left(\frac{V/h}{c_w W} \right)^k$$

$$\frac{\partial c}{\partial V} = kc_1 \left(\frac{V^{\frac{k-1}{k}}/h}{c_w W} \right)^k$$

$$\frac{\partial c}{\partial W} = -kc_1 \left(\frac{V/h}{c_w W^{\frac{-(k+1)}{k}}} \right)^k$$

Estructura del modelo

- El modelo contiene la siguiente información de 1.053 tramos que comprenden tanto la red concesionada como la no concesionada del nivel nacional:
 - Tráfico.
 - Volumen.
 - Composición.
 - Tipo de terreno.
 - Especificaciones (ancho de calzada, ancho de berma, pendiente (%), radio de curvatura (grados/Km) y deflexión(m/Km)).
- A partir de esta información, previamente se estiman y se incluyen al modelo:
 - La capacidad de la vía (manual Invías).
 - Los vehículos equivalentes.
 - Los ejes equivalentes.

Definición de parámetros para alimentar el modelo

- Capacidad: Corresponde al máximo número de vehículos que tiene una probabilidad razonable de atravesar una sección de carretera durante un determinado periodo de tiempo, para unas condiciones de la vía y del tráfico.
- Depende de las características propias de la vía, geometría y estado del pavimento y del tráfico, prohibiciones de adelantamiento entre otras.



Parámetros para la medición de capacidad

Metodología UNICAUCA

Carreteras de una calzada con un carril por cada sentido

Tipología de terreno



Tipo de terreno	Subidas + Bajadas (m*Km)	Curvatura Horizontal (grados * Km)
Plano	5	50
Ondulado	19	150
Montañoso	50	300

Terreno	Pendiente transversal (%)	Pendiente Longitudinal (%)	Trazado	Explanación
Plano	< 9%	< 3%	Muy fácil	Mínimo
Ondulado	< 16%	< 6%	Fácil	Moderado
Montañoso	< 84 %	< 8%	Difícil	Significativo
Escarpado	> 84%	> 8%	Muy Difícil	Oneroso

Metodología para el cálculo de capacidad

La relación volumen/capacidad (V/C) expresa el grado de saturación o congestión que una vía experimenta en un momento específico

$C_i = 3200$ automóviles/hora/ambos sentidos

$$C_{60} = C_i * f_{pe} * f_d * f_{cb} * f_p$$

C_{60} = Capacidad vial, vehículos / hora

C_i = Capacidad ideal, en Colombia es 3200 veh / hora

f_{pe} = factor de corrección por la pendiente del sector

f_d = Factor de Corrección distribución del transito por sentido

f_{cb} = Factor de corrección en función del ancho del carril y la berma

f_p = Factor de Corrección por la presencia de Vehículos pesados.

Metodología para el cálculo de capacidad

- Fpe relaciona la influencia de la inclinación y la relación potencia/peso y determina como afectan la velocidad, el flujo y la capacidad inicial.
- Fd: Medida de la libertad para rebasar con facilidad, seguridad y sin colas por vehículos lentos

TIPO DE TERRENO	PORCENTAJE DE ZONAS DE NO REBASE, %
Plano	0 - 20
Ondulado	20 - 40
Montañoso y escarpado	40 - 100

- Fcb: como el ancho del carril y la berma afecta la confianza del usuario, la velocidad y la capacidad del vehículo
- Fp: refleja la interacción de los vehículos pesados sobre las colas y las demoras, dado el espacio que ocupan y las bajas velocidades.

Metodología para el cálculo de capacidad

- Posteriormente se calcula la capacidad correspondiente a los cinco minutos de mayor demanda, c_5 , expresada en vehículos mixtos por hora utilizando el FHP.

$$C_5 = C_{60} * FHP$$

- Los valores típicos del FHP, se relacionan directamente con el volumen horario total (Veh/h), así:

Factores de pico horario basados en periodos de cinco minutos
suponiendo llegadas de vehículos aleatorias (FPH)

Volumen Horario Total veh/h (C60)	Factor de Pico Horario	Volumen Horario Total veh/h (C60)	Factor de Pico Horario	Volumen Horario Total veh/h (C60)	Factor de Pico Horario
100	0.68	1000	0.84	2200	0.95
200	0.70	1200	0.86	2400	0.95
300	0.72	1400	0.89	2600	0.96
400	0.74	1600	0.90	2800	0.97
600	0.78	1800	0.92	3000	0.97
800	0.81	2000	0.93		

Cálculo de Ejes Equivalentes

- La metodología propuesta por el AASHTO para pavimentos flexibles identifica los factores de impacto para cada eje en función del número estructural y de la jerarquía de la vía.
- Para tal fin se calcularon los factores de impacto para las diferentes configuraciones de camión: C2P, C2G, C3 – C4, C5, >C5.

Periodo de diseño	Escenario	Número Estructural	Factor de Impacto Ejes Equivalentes								
			C2P	C2G	C3	C4	C2S1	C2S2	C3S1	C3S2	C3S3
25	Troncal	3	0.200	0.372	3.419	3.717	4.889	5.769	5.934	6.814	4.599
25	Troncal	4	0.193	0.357	3.363	3.661	4.803	5.673	5.840	6.710	4.544
25	Troncal	5	0.183	0.338	3.414	3.706	4.874	5.764	5.928	6.818	4.577
25	Troncal	6	0.177	0.326	3.478	3.765	4.988	5.888	6.051	6.951	4.628
20	Secundaria	3	0.246	0.458	3.219	3.538	4.569	5.389	5.559	6.379	4.461
20	Secundaria	4	0.226	0.420	3.093	3.414	4.393	5.183	5.358	6.148	4.337
20	Secundaria	5	0.199	0.369	3.189	3.495	4.549	5.369	5.540	6.360	4.393
20	Secundaria	6	0.185	0.342	3.336	3.630	4.776	5.636	5.802	6.662	4.507
15	Terciaria	3	0.324	0.609	2.996	3.343	4.216	4.956	5.128	5.868	4.320
15	Terciaria	4	0.278	0.520	2.780	3.134	3.920	4.610	4.797	5.487	4.115
15	Terciaria	5	0.224	0.417	2.922	3.248	4.152	4.892	5.071	5.811	4.181
15	Terciaria	6	0.197	0.365	3.157	3.462	4.507	5.317	5.488	6.298	4.358

Cálculo de Ejes Equivalentes

- Para el cálculo se tiene como insumo los conteos de tráfico del INVIAS, discriminados por Autos, Buses y Camiones, además los camiones se discriminan en las diferentes tipologías.
- Se requiere determinar la tasa de crecimiento para cada estación de conteo, se tiene el periodo de diseño en función de la jerarquía de la vía, con estos parámetros se calculan los ejes equivalentes para el periodo de diseño así:

$$ESALS_{diseño} = \frac{(1+i)^{n-1}}{i} * \sum_{i=1}^n F_{CE_i} * Veh_i * 365$$

- Dado que el modelo requiere los ejes equivalentes por carril, se debe afectar los ejes equivalentes de diseño por dos factores, uno que señala la distribución por sentido y otro para la distribución en el carril más pesado cuando hay vías de más de dos carriles.

Cálculo de Vehículos Equivalentes

- El cálculo de los vehículos equivalentes busca convertir un flujo de vehículos mixtos, en una unidad que permite representar vehículos de diferente tamaño, adicionalmente considera el tipo de terreno en el que se presenta el análisis.

Vehículos equivalentes - Metodología Colombiana				
Vehículo	Plano	Ondulado	Montañoso	Escarapado
Automóviles	1	1	1	1
Buses	2	3.4	6	6
Camiones	2.2	5	10	10